Propuesta de Trabajos Fin de Grado, curso académico 2020-21

PROFESOR: ***MATTEO BONFORTE***

Número máximo de TFG que solicita dirigir: **2 (si hace falta, 3)** (entre 1 y 3)

Cursos recomendados: los cursos de EDOs y EDPs (cuantos más mejor). También es conveniente haber cursado Variable Real, Análisis Funcional, Modelización.

1.- TÍTULO: 1. La ecuación del calor clásica y/o fraccionaria.

(Las temáticas son amplias, se aceptan uno o más estudiantes en este tema, contactar con el profesor para más detalles o para tratar otros temas afines)

Resumen/contenido: Estudiaremos las propiedades básicas de los flujos del calor clásicos y/o fraccionarios (o no-locales. Los problemas se plantean en diferentes contextos: en todo el espacio, en dominios acotados, en variedades Riemannianas, etc. Cuando la difusión se rige por un operador no-local (que tiene en cuenta la influencia de las iteraciones de larga distancia), nuevos fenómenos interesantes aparecen. Estos modelos son de fundamental importancia tanto para las muchas consecuencias teóricas como para las numerosas aplicaciones y las conexiones con otras áreas de las matemáticas.

Se pueden estudiar varias temáticas:

(Una o más por TFG, se acepta uno o más estudiantes en este tema)

- Los problemas se pueden plantear en todo el espacio o en dominios acotados con varias condiciones de borde (Dirichlet, Neumann, Robin, etc.)
- Diferentes conceptos de soluciones (débiles, clásicas, etc.). Existencia y unicidad de soluciones (también con datos “grandes”). Existencia y unicidad de trazas iniciales. Unas pinceladas de la teoría de Widder.
- Efectos regularizantes y conexiones con desigualdades funcionales (Sobolev, Log-Sobolev, Gagliardo-Nirenberg, Nash, etc.)
- Estimaciones de regularidad
- Comportamiento asintótico: básico y más fino (con tasas de convergencia optima). Conexión con ecuaciones de Fokker-Planck y Ornstein-Uhlenbeck, con teoría espectral, y con teoremas del límite central en probabilidad. Conexiones con desigualdades funcionales (Sobolev, Log-Sobolev, Poincaré, Hardy, Gagliardo-Nirenberg, Nash, eventualmente con pesos)
- Laplacianos Fraccionarios en dominios con condiciones de Dirichlet: diferentes nociones y definiciones de Laplaciano fraccionario y estudio de la ecuación del calor asociada (temáticas parecidas a las anteriores)
- La ecuación del calor en variedades Riemannianas

Bibliografía/referencias:

(1) Brezis, Haim. Analyse fonctionnelle. Thorie et applications. Collection Mathematiques Appliquees pour la Matrise. Masson, Paris, (1983).
(2) M. Bonforte, Y. Sire, J. L. Vazquez, Optimal Existence and Uniqueness Theory for the Fractional Heat Equation. Nonlin. Anal. 153, (2017)
(3) E. B. Davies. Heat kernels and spectral theory, Cambridge Tracts in Mathematics, 92. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. x+197 pp.
(4) L. C. Evans. Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics, Vol.19, AMS.
(5) D. V. Widder. “The Heat Equation”, Academic Press, New York, (1975).

2.- TÍTULO: Introducción a las ecuaciones de difusión no lineales.

(Las temáticas son amplias, se aceptan uno o más estudiantes en este tema, contactar con el profesor para más detalles o para tratar otros temas afines)

Resumen/contenido: Se estudiaran las propiedades básicas para ecuaciones de difusión no-lineales de tipo medios porosos o p-Laplaciano: existencia, unicidad, estimaciones a priori, regularidad, comportamiento asintótico (para tiempos grandes). Estos modelos tienen una gran importancia sea del punto de vista teórico sea del punto de vista aplicado y se exploraran varios aspectos en ambas direcciones, sea teóricas que más aplicadas.

Se pueden estudiar varias temáticas:

(Una o más por TFG, se acepta uno o más estudiantes en este tema)

- Los problemas se pueden plantear en todo el espacio o en dominios acotados con varias condiciones de borde (Dirichlet, Neumann, Robin, etc.)
- Diferentes conceptos de soluciones (débiles, clásicas, etc.). Existencia y unicidad de soluciones y de trazas iniciales.
- Efectos regularizantes y conexiones con desigualdades funcionales (Sobolev, Log-Sobolev, Poincaré, Hardy, eventualmente con pesos)
- Estimaciones de regularidad
- Comportamiento asintótico: básico y más fino (con tasas de convergencia optima). Conexión con ecuaciones no-lineales de Fokker-Planck y Ornstein-Uhlenbeck, y con teoría espectral e desigualdades funcionales (Hardy-Poincaré con pesos, Sobolev y Gagliardo-Nirenberg)

Bibliografía/referencias:

(1) J. L. Vazquez. “The porous medium equation. Mathematical theory”. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007.
(2) Mas referencias: contactar con el profesor.

3.- TÍTULO: Calculo de Variaciones: métodos directos e indirectos.

(Las temáticas son amplias; se aceptan uno o más estudiantes en este tema, contactar con el profesor para más detalles o para tratar otros temas afines)

Resumen/contenido: Se abordará uno (o más) entre los temas clásicos o más recientes del cálculo de variaciones: por ejemplo el problema isoperimétrico, de superficies mínimas, de potenciales de doble pozo (Allen-Cahn), problemas de mecánica clásica (por ejemplo mecánica celeste), el problema de obstáculo, el problema de Laplace (Laplaciano o p-Laplaciano), etc.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a estos problemas resultan ser ordinarias EDOs o en derivadas parciales EDPs, dependiendo del problema considerado. El método directo consiste en encontrar extremales (puntos críticos del funcional) de dichas ecuaciones usando métodos de análisis funcional. Los métodos indirectos consisten en resolver dichas ecuaciones por otros métodos más clásicos (cuando se puede).

Un tema muy interesante es el problema de la regularidad de los minimos de los funcionales (XIX problema de Hilbert) y la solución de ello dada por De Giorgi-Nash-Moser. Este tema está relacionado con las EDPs elípticas lineales y no-lineales: se puede estudiar con métodos de cálculo de variaciones la existencia, unicidad, y las estimaciones de regularidad.

Bibliografía/referencias:

(1) G. Buttazzo, M. Giaquinta, S. Hildebrandt, One-dimensional variational problems. An introduction (1999, Oxford University Press, USA)
(2) B. Dacorogna, Introduction to the calculus of variations, Imperial College Press(2004)
(3) L. C. Evans. Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics, Vol.19, AMS.
(4) Gelfand, Fomin, Calculus of Variations-Dover Publications (2000)
(5) M. Kot, A first course in the calculus of variations
(6) M. Levi, Classical Mechanics with Calculus of Variations and Optimal Control. An Intuitive Introduction
(7) M. Giaquinta, S. Hildebrandt - Calculus of variations I (2006, Springer)
(8) E. Giusti, “Direct methods in the calculus of variations”, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ , 2003. viii+403 pp.